Théorème de Carathéodory

Leçons concernées : 181

Théorème 1 (Carathéodory)**.** *Soient X un espace affine de dimension finie n, et $S \subset X$. Alors* $\mathrm{Conv}(S)$ *est l'ensemble des barycentres à poids positifs d'au plus $n+1$ points pondérés de S.*

Démonstration.

On note $\tilde{S}$ l'ensemble des barycentres à poids positifs de familles finies de points de S.

Étape 1 : Montrons que $\mathrm{Conv}(S) = \tilde{S}$.

On sait que $S \subset \mathrm{Conv}(S)$, et que $\mathrm{Conv}(S)$ est convexe. Il vient alors que $\mathrm{Conv}(S)$ contient tous les barycentres à poids positifs de familles finies de points de $\mathrm{Conv}(S)$, et donc tous les barycentres à poids positifs de familles finies de points de S. Ainsi, $\tilde{S} \subset \mathrm{Conv}(S)$.

Réciproquement, montrons maintenant que $\mathrm{Conv}(S) \subset \tilde{S}$. Pour cela, il suffit de montrer que $\tilde{S}$ est convexe. Par définition de $\mathrm{Conv}(S)$, on aura alors le résultat, puisque $S \subset \tilde{S}$. Soient alors $A, B \in \tilde{S}$. Écrivons de plus $A = \mathrm{Bar}(A_i, a_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ et $B = \mathrm{Bar}(B_i, b_i)_{i \in [\![1,q]\!]}$, avec $a_i, b_i > 0$. Soit maintenant $P \in [AB]$. Il existe alors $t \in [0,1]$ tel que $P = \mathrm{Bar}((A,t),(B,1-t))$. Par associativité du barycentre, on obtient :

$$P = \mathrm{Bar}((A,t),(B,1-t)) = \mathrm{Bar}((A_i, ta_i),(B_j,(1-t)b_j))_{i \in [\![1,p]\!], j \in [\![1,q]\!]}$$

Ainsi, $P \in \tilde{S}$ qui est donc convexe, d'où $\mathrm{Conv}(S) \subset \tilde{S}$, puis $\mathrm{Conv}(S) = \tilde{S}$.

Étape 2 : Montrons qu'on peut se restreindre à des familles d'au plus $n-1$ points.

Soit $A \in \mathrm{Conv}(S)$. Écrivons $A = \mathrm{Bar}(A_i, \lambda_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p > 0$ et $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$. Sans perte de généralité, on peut supposer que p est le nombre minimal de termes intervenant dans une écriture comme combinaison convexe de x. Raisonnons par l'absurde, et supposons que $p \geqslant n+2$. La famille $(\overrightarrow{A_1A_i})_{i \in [\![2,p]\!]}$ est liée, car $p-1 \geqslant n+1 > n$. Donc il existe $\alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=2}^p \alpha_i \overrightarrow{A_1A_i} = 0$. En posant $\alpha_1 = -\sum_{i=2}^p \alpha_i$, on a $\sum_{i=1}^p \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = 0$ pour tout $O \in X$ et $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 0$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $A = \mathrm{Bar}(A_i, \lambda_i + t\alpha_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ et $\sum_{i=1}^p \lambda_i + t\alpha_i = 1$. On considère maintenant l'ensemble :

$$F = \{t \in \mathbb{R} \,|\, \forall\, i \in [\![1,p]\!],\ \lambda_i + t\alpha_i \geqslant 0\} = \left(\bigcap_{\alpha_i > 0} \left[-\frac{\lambda_i}{\alpha_i}, +\infty\right[\right) \bigcap \left(\bigcap_{\alpha_i < 0} \left]-\infty, -\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\right]\right)$$

Ainsi F contient 0 donc est non vide. De plus, il existe au moins un α_i non nul, donc F n'est pas $\mathbb{R}$. Il existe également un autre α_i de signe opposé, car $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 0$. Alors F admet une borne inférieure et une borne supérieure, de la forme $-\frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}}$ pour un certain i_0 et noté t_0. On a alors :

$$A = \mathrm{Bar}(A_i, \lambda_i + t_0\alpha_i)_{i \in [\![1,p]\!]} = \mathrm{Bar}(A_i, \lambda_i + t_0\alpha_i)_{i \in [\![1,p]\!] \setminus \{i_0\}} \qquad \text{avec} \qquad \forall\, i \in [\![1,p]\!],\ \lambda_i + t_0\alpha_i \geqslant 0$$

Cela contredit la minimalité de p. On en déduit que $p \leqslant n+1$, ce qui conclut.

□

Corollaire 2. *Soit S un compact d'un espace euclidien E. Alors* $\mathrm{Conv}(S)$ *est compact.*

Démonstration.

Considérons $K = \left\{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\right\}$. C'est un ensemble fermé du compact $[0,1]^{n+1}$, donc c'est un compact. On considère l'application :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} K \times S^{n+1} & \longrightarrow & E \\ ((\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}), A_1, \dots, A_{n+1}) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i A_i \end{array} \right.$$

Par le théorème de Carathéodory, $\mathrm{Conv}(S) = \varphi(K \times S^{n+1})$. Or $K \times S^{n+1}$ est compact, comme produit de compacts, et φ est continue, donc $\mathrm{Conv}(S)$ est compact. □

Références

[Gou] Xavier Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse.* Ellipses